

Laten we het vouwen

De helft van de helft... wordt dat ooit nul?

Bij het Vaknetwerk Wiskunde gaf Jacoliene van Wijk een workshop over wiskundig vouwen in de bovenbouw, met een aantal praktische vouwopdrachten waar je direct mee aan de slag kunt in de les. Eén van de opdrachten is het vouwen van exponentiële functies, die je zowel op de havo als het vwo kunt geven, bij wiskunde A én B.

Vouwen voor begripsvorming van functies

In *Euclides* 96-3 heb ik een overzicht gegeven van vouwopgaven in *Euclides* door 95 jaargangen heen. Eén van de onderwerpen waarbij wiskundig kan worden gevouwen is 'vouwen voor de begripsvorming van functies'. Vouwen leent zich hier goed voor, omdat het papier de leerlingen een duidelijke, concrete context geeft. Onderschat niet hoeveel focus (een deel van) een A4-tje de leerling geeft bij de opdracht: ze kunnen het papier aanraken, vouwen, er aantekeningen op maken, meten en zelfs scheuren of knippen. Verder mogen de leerlingen bij vouwen letterlijk iets dóen, ze kunnen met hun handen werken en overleggen. En via de vouwbeweging, en het praten erover, ervaren ze letterlijk de stappen die ze later gaan abstraheren tot wiskundige formules. Maar die abstractie laat zich niet direct zien. En dat is óók een groot voordeel van vouwen: vrijwel iedere leerling wil beginnen aan een vouwopdracht, niet iedere leerling wil beginnen aan een opgave uit het boek...

“ Vrijwel iedere leerling wil beginnen aan een vouwopdracht ”

Wiskundig vouwen?

Bij wiskundig vouwen heb ik het nu niet over het maken van mooie wiskundige figuren zoals de *hypar*, zie figuur 1^[1] en de verschillende figuren die daarmee kunnen worden gemaakt.



figuur 1 Twee 4-hat hypars (foto: auteur)

Bij wiskundig vouwen denk ik meer aan de betekenis die Friedma & Rittberg ^[2] en Nedrenco ^[3] eraan geven: het gaat om het *proces* van het vouwen, niet om het *resultaat* van het vouwen. Om precies te zijn: wiskundig vouwen is een onderdeel van origami, waarbij de nadruk ligt op het *haptische proces* van vouwen, en zelfs uitvouwen, om vouwlijnen te onderscheiden en *het resultaat wiskundig te analyseren*, in relatie tot het wiskundige probleem. Dat geldt zeker voor de vouwopdracht in dit artikel: grote kans dat aan het einde van de les de papierbak gevuld is met opgefrommelde en verknipte stroken papier...

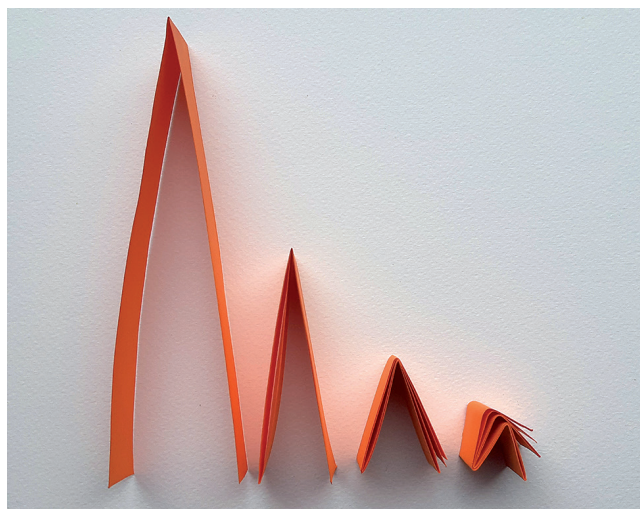
Vouwklassenmanagement

Ik gaf al aan dat vrijwel iedere leerling wil beginnen aan een vouwopdracht. Het is fijn als dat inderdaad de vouwopdracht is die je voor ogen had in deze les, en dat niet binnen vijf minuten de vliegtuigjes in de plafondplaten

vastzitten. Ofwel: goed klassenmanagement is bij vouwen belangrijk. Van het niet toelaten van het vouwen van eigen ontwerpen, tot het opruimen van de tafels en de vloer aan het einde van de les (geef de papierbak maar door!), het helpt als je een goede band hebt met de klas waar je een vouwopdracht gaat geven.

Vouwen van een exponentiële functie – de basis

Bij het vouwen van een exponentiële functie gaat het om herhaald vouwen. Het is daarmee enigszins vergelijkbaar met de begripsvorming van herhaald delen bij logaritmische functies, zoals in het artikel van Vos & Espedal [4]. De basis is als volgt: geef de leerlingen een strook papier, van de lange zijde van een gekleurd A4-papier. De kleur is straks belangrijk bij het maken van een grafiek. Vraag de leerlingen om de strook over de korte zijde dubbel te vouwen, en dit dubbele papier nog een keer dubbel te vouwen, en nog een keer, en nog een keer, zie figuur 2.



figuur 2 Herhaald vouwen van de strook

Als je snel wilt overgaan naar een formule is het handig als de leerlingen direct een tabel invullen met de lengte van de gevouwen strook, na x -keer vouwen, zie figuur 3. Dit werkblad staat op de site van *Euclides*.

Meestal is het vouwen na een keer of zes wel gedaan. Het mooie is dat je nu – al dan niet met behulp van de tabel, die de leerlingen verder zouden kunnen voortzetten zonder vouwen – een klassengesprek kunt beginnen over het limietbegrip. Want: hoe vaak je ook vouwt, wordt de lengte van de gevouwen strook papier ooit nul? Waarom wel? Waarom niet? Bij hoeveel keer vouwen zou de lengte korter worden dan 1 millimeter? En wat gebeurt daarna?

Handen uit je mouwen, functies vouwen!

Dit blad is van:.....

Wat heb je nodig?

Dit blad en drie stroken papier van ca. 2 bij 30 cm.

Wat ga je leren?

Welke wiskundige verbanden het dubbelvouwen van een strook papier kunnen beschrijven.

Opdracht A: vouwen

1. Je hebt een strook papier gekregen van een vel A4 papier. Vouw deze strook over de korte zijde dubbel. Vouw zo netjes mogelijk!
2. Begin met het invullen van tabel 1:

Aantal vouwen	0	1	2	3	4
Lengte strook					

Tabel 1

3. Vouw de dubbelgevouwen strook die je nu hebt nog een keer dubbel. Herhaal dit dubbelvouwen nog een aantal keer in dezelfde richting. Vul bij iedere stap de tabel in. Als je de strook vier keer hebt gevouwen ben je klaar.
4. Stel dat je tabel 1 zou uitbreiden naar 5, 6, 7, etc. vouwen. Zou de breedte van het papier dan ooit 0 worden? Of negatief? Waarom wel of niet?

figuur 3 Werkblad bij het herhaald vouwen

Vervolgens kun je het gesprek brengen op de formule bij het vouwen van deze strip, met groeifactor 0,5, en het begingetal 30.

En weer terug

Het uitvouwen van de strook geeft – afhankelijk van het aantal vouwen – de formule $y = 0,46875 \cdot 2^x$. De beginhoeveelheid komt uit het doorrekenen vanaf de afmeting van de 30 cm van de strook via de tabel. Als de leerlingen zelf nauwkeurig doorvouwen en meten dan zullen ze een pakketje – en daarmee beginhoeveelheid – van ongeveer 0,5 cm krijgen, dus dan starten de leerlingen met (een variatie op) $y = 0,5 \cdot 2^x$. Als er in de klas verschillende beginhoeveelheden worden gekozen kan het leuk zijn om deze via de GR met elkaar te vergelijken, bijvoorbeeld de uitkomst bij $x = 10$. Persoonlijk vind ik het erg mooi om te merken dat zo'n abstracte formule ook bij havo wiskunde A – met het frommeltje papier in hun hand dat ze uitvouwen – helemaal begrepen wordt. Met name de groeifactor weten ze zelf meestal heel snel.

En weer heen...

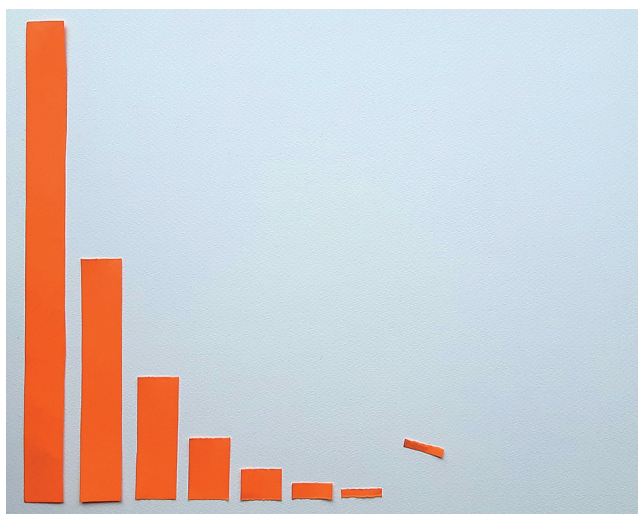
Nu kan er ook een gedachte-experiment worden opgezet om de 'magie' van de snel oplopende getallen bij exponentiële functies nog eens te laten ervaren (zie ook *Euclides* 84-4 en 87-2): stel dat je een oneindig lange strip papier hebt, en het papier is 0,1 mm dik, hoe vaak moet je een velletje dan dubbelvouwen om van hier naar de maan te komen (384.400 km)? NB: het gaat nu om de *dikte* van de

>

gevouwen stapel, niet meer de lengte. Welke formule en vergelijking horen hierbij?

Een grafiek maken

Het vouwen met groefactor 0,5 leent zich goed om direct een grafiek te maken. Het mooiste resultaat krijg je als je gekleurde stroken papier neemt om te vouwen, en een wit A4-velletje als achtergrond voor de grafiek. Laat de leerlingen een nieuwe strook steeds dubbelvouwen, maar zet de vouwen dit keer extra goed aan, zodat het papier op de vouw kan worden afgescheurd. De steeds kortere stroken die zo worden verkregen kunnen als een staafdiagram naast elkaar gelegd worden, waarna de stap naar een lijngrafiek, én het begrip daarvan, een stuk kleiner is. Het werkt het best als de leerlingen direct ná het afscheuren steeds het strookje naast het vorige strookje leggen, dan zie je de grafiek echt 'groeien', zie figuur 4. Let op dat ook hier het 'restje' papier dat nauwelijks meer gevouwen en gescheurd kan worden ook weer een aanknopingspunt is voor het limietbegrip.



figuur 4 Grafiek van een gevouwen en afgescheurde strip papier

Vouwen van een exponentiële functie - variatie & toenamediagram

Als variatie op het vouwen van $0,5^x$ en 2^x kun je natuurlijk ook denken aan $0,75^x$ en $0,25^x$. Het bijzondere van deze functies is dat als je er een grafiek bij maakt, zoals hiervoor beschreven werd voor $0,5^x$, de grafiek nu een toenamediagram is geworden... ook weer een leuke toepassing voor wiskunde A! En kunnen de leerlingen bij deze alternatieven ook een nieuwe formule bedenken bij de grafiek? En wat is dan de samenhang met de functie waarmee werd begonnen?

Zijstap naar logaritmen

Aan het begin van het artikel gaf ik al aan dat er een vergelijking gemaakt kan worden met herhaald delen bij logaritmen. Bij het drie keer dubbel vouwen van een strip bestaat de strip uit acht lagen papier, of, als je de strip uitvouwt, uit acht vakjes: ${}^2\log(8) = 3$. Nog twee keer vouwen geeft 32 lagen papier, ${}^2\log(32) = 5$, of... hebben we hier een route naar het uitleggen van ${}^2\log(8) + {}^2\log(4) = {}^2\log(32)$?

Probeer het eens!

Dit artikel geeft aan hoe je met een paar stroken A4-papier per leerling al snel kunt komen tot het bedrijven van wiskunde, het letterlijk ervaren van een functie en een limiet, van praktisch vouwen naar abstracte wiskunde als functies en een eerste aanzet naar grafieken. Probeer het eens! Zeker als je de stroken van tevoren maakt, zullen er weinig vliegtuigjes opstijgen in de les. Veel plezier!

Voor het werkblad bij deze vouwles zie:



vakbladeuclides.nl/973helftvandehelft

Noten

- [1] Demaine, E. D. (2014). *Hyperbolic Paraboloids*. <http://erikdemaine.org/hypar/>
- [2] Friedman, M., & Rittberg, C. J. (2019). The material reasoning of folding paper. *Synthese*. <https://doi.org/10.1007/s11229-019-02131-x>
- [3] Nedrenco, D. (2018). Learning how to axiomatise through paperfolding. In R. J. Lang, M. Bolitho, & Z. You (Eds.), *Origami 7, The proceedings from the 7th international meeting in origami in science, mathematics, and education. Volume 1: design, education, history and science* (pp. 257–272). Tarquin.
- [4] Vos, P., & Espedal, B. (2016). Logaritme, een betekenisvolle aanpak met herhaald delen. *Euclides*, 91(3), 4–6.

Over de auteur

Jacoliene van Wijk is eerstegraads docent wiskunde aan het Goois Lyceum en doet onderzoek naar wiskundig vouwen in de wiskundeles. Dit onderzoek wordt begeleid door Michiel Doorman (Freudenthal Instituut). E-mailadres: jvwijk@gsf.nl. Meer informatie op www.wiskundigvouwen.nl.