Docentenhandleiding:

Origami voor inzicht in verhoudingen

Een lesplan ontwikkeld door: Jolente, Rowan en Jan

Inleiding

Origami is de kunst van het vouwen, meestal met een vierkant blaadje en zonder te knippen. Dit vouwen kan mooie kunst opleveren en veel mensen kennen origami daarom ook van bijvoorbeeld de prachtige kraanvogels. Wat minder mensen weten is dat er ook een grote connectie is tussen wiskunde en origami. Deze connectie is er op grofweg twee manieren. Ten eerste kan origami gebruikt worden om wiskunde beter te snappen. Een voorbeeld hiervan is om een wiskundige constructies te maken met origami om de wiskunde te visualiseren. Daarnaast is er ook een hele wiskundige tak die zich bezig houdt met de wiskunde achter origami. Dit lesplan is gebaseerd op de eerste connectie en in het bijzonder wordt in deze les het begrip van verhoudingen duidelijk gemaakt met behulp van vouwconstructies.

Waarom origami in de wiskundeles?

Er zijn een aantal redenen waarom het gebruik van origami in het algemeen bevorderlijk is voor het leren van wiskunde op de middelbare school. Ten eerste zorgt origami ervoor dat de leerlingen op een ontdekkende manier met de wiskundige stof aan de slag gaan. Een les kan met origami worden ingericht zodat de leerlingen zelf gaan experimenteren met bepaalde concepten. Ten tweede zorgt origami ervoor dat de leerlingen meer ruimtelijk inzicht ontwikkelen. In plaats van een tekening in het boek of schrift hebben de leerlingen namelijk een blaadje voor zich waarmee ze kunnen inzien wat er precies aan de hand is. Ten derde zijn de leerlingen ook met hun handen bezig, wat de creativiteit van de leerlingen stimuleert. Misschien wel de belangrijkste motivatie voor het gebruik van origami in de wiskundeles is dat de wiskunde zichtbaar wordt in de ‘echte wereld’ als je de wiskunde met origami laat zien. Origami is in die zin een heel goed middel om abstracte concepten voor je neus zichtbaar te maken.

Waarom vouwen we verhoudingen met origami?

Verhouding is een begrip dat door leerlingen in de onderbouw vaak lastig wordt gevonden. De leerlingen hebben meestal al kennis gemaakt met verhoudingen door bijvoorbeeld verhoudingstabellen. Daarnaast hebben leerlingen soms ook al gezien dat verhoudingen gebruikt kunnen worden in meetkundige problemen, bijvoorbeeld door congruente driehoeken. Toch blijft verhouding vaak nog een lastig begrip. Dit is ook niet gek, want verhouding is een abstract concept. Echter, met origami kan dit duidelijker worden gemaakt. In dit lesplan gaan de leerlingen dezelfde verhouding vouwen, namelijk een derde, met blaadjes van een verschillende grootte. We passen hier op elk blaadje precies dezelfde constructie toe. Hierdoor ontdekken de leerlingen dat verhouding in essentie niets met absolute lengte/waarde te maken heeft, maar dat het een relatief begrip is. Deze verrijking van hun begrip van verhoudingen geeft de leerlingen ook meer intuïtie voor wanneer verhoudingen kunnen worden toegepast.

Praktische informatie

Samenvatting les:

Aan het begin van de les krijgt iedere leerling vierkante blaadjes, maar grootte van de blaadjes verschilt per leerling. Vervolgens vouwt de docent klassikaal, samen met de leerlingen, de verhouding ⅓ aan een van de zijden. De leerlingen meten de lengte van de volledige zijde van het vierkant en van het kleine stukje dat we hebben verkregen met behulp van onze constructie. Vervolgens gaan de leerlingen aan de slag om te bewijzen dat ze inderdaad de verhouding een derde hebben gevouwen. Aan het einde van de les worden de leerlingen uitgedaagd om met een zelfde soort methode ook andere verhoudingen te vouwen.

Benodigdheden (voor N leerlingen):

- N hand-outs voor de leerlingen met de opdrachten
- N instructies voor het vouwwerkje 'Weerspiegeling van bergen in water'
- N evaluatieformulieren
- 2N vierkante blaadjes van verschillende grootte. Bijvoorbeeld:
    - een kwart met zijden van ~7,5 cm
    - een kwart met zijden van ~10 cm
    - een kwart met zijden van ~15 cm.
    - een kwart met zijden van ~20 cm.
      (Dit zijn de korte zijden van respectievelijk een A7, A6, A5, A4. Als er alleen A4 voorhanden is, dan kan deze enkele keren worden gehalveerd om de kleinere formaten te krijgen.)
- Twee vierkante blaadjes van ongeveer 20 cm. voor jezelf om de constructie voor te doen voor de klas.
- Geodriehoek (of liniaal) en rekenmachine door leerlingen zelf meegebracht

Duur van de les:

Deze les is gemaakt om ongeveer 50 minuten te duren

Doelgroep:

Deze les is geschikt voor de derde of vierde klas van HAVO en VWO.

Lesindeling voor 50 minuten (zonder moeilijke bewijsopgaven)

Demonstratie ⅓ vouwen (10 min.)

Docent:
“Deze les gaat over het vouwen van verhoudingen. We gaan nu samen constructie doen en daar gaat iets bijzonders uit komen” of iets dergelijks. Vertel nog niet dat je de verhouding ⅓ gaat vouwen, en deel de blaadjes uit aan de leerlingen. Het is leuk als leerlingen die bij elkaar in de buurt zitten verschillende groottes papier krijgen.

Laat de leerlingen beginnen met het schrijven van namen in de hoekpunten van het vierkant. Laat vervolgens een afbeeldingen van de vouwstappen zien op het bord en voer deze zelf ook uit als toelichting voor de klas. Benoem dat je na drie lijnen te hebben gevouwen een snijpunt krijgt waar de laatste lijn doorheen gaat.

Leerling:
Doet met eigen vouwblaadje de handelingen van de docent na.

Opmeten en verhouding berekenen (5 min.)

Docent:
Geef instructie om (hoek)punten op het blaadje de namen te geven zoals in de onderstaande afbeelding en de afstanden AG en AB op te meten. Maak op het bord een verhoudingstabel met in een rij AG en in de andere rij AB (zie hieronder). Vraag wie zijn gemeten afstanden wil delen, en schrijf deze op in de tabel. Vraag wat er opvalt aan de gemeten afstanden. Misschien herkennen sommige leerlingen dat AG/AB een verhouding van ⅓ is. Laat anders iedereen nog eens voor hun eigen blaadje AG/AB uitrekenen. Geef de conclusie dat je ongeacht de grootte van je blaadje met deze vouwmethode op een verhouding van ⅓ uitkomt.

Lengte lijnstuk AG	…	…		1
Lengte lijnstuk AB	…	…		3

Leerling:
Meet afstanden van de vouwen in het blaadje, en komt erachter dat er een verhouding van ⅓ gevouwen is. Verder krijgt de leerling inzicht in dat verhoudingen bestaan ongeacht de grootte van een blaadje, dus dat het relatief begrip is.

Waarom is deze verhouding ⅓? (15 min.)

Docent:

Voordat de blaadjes worden uitgedeeld: teken op het bord een assenstelsel met het blaadje erin (dus een vierkant met hoekpunten (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)) en leg uit dat we nu gaan bewijzen dat de constructie die we net hebben gedaan ⅓ geeft. Deel ondertussen het opgavenblad uit en laat leerlingen hier aan beginnen. Ondertussen kunnen de docent(en) rondlopen en de leerlingen helpen als deze niet uit de vragen komen. Inventariseer of leerlingen nog weten hoe je de vergelijking van een lijn door twee punten opstelt en hoe je snijpunten berekent terwijl de leerlingen zelf aan het werk zijn. Het opgavenblad zal de leerlingen door de opgave heen helpen. De leerlingen die er snel uitkomen kunnen nadenken over de vraag of ze ook ¼ of ⅕ kunnen vouwen door weer een snijpunt te vinden van twee lijnen. Dit is de volgende opgave van het opgavenblad.

Leerling:

Traint probleemoplossend vermogen bij het nadenken over de vragen. Uiteindelijk zal de leerling vergelijkingen voor lijnen moeten opstellen en een snijpunt moeten bepalen. Deze technieken worden dus getraind, en leerlingen zien op deze manier een voorbeeld van een toepassing van deze technieken. Daarnaast leert de leerling de beginselen van de analytische meetkunde door een meetkundig probleem op te lossen in een assenstelsel.

Op dit moment zijn sommige leerlingen waarschijnlijk al klaar met de eerste opdracht, en anderen lopen nog vast. Daarom is het nuttig om hier op het bord voor te doen hoe je bewijst dat je ⅓ krijgt. (Dit zal ongeveer 5 minuten in beslag nemen)

Na het voordoen op het bord hebben de leerlingen de keuze om verder te gaan met de wiskunde opdrachten (optie 1), of om iets te vouwen, waarbij ze de verhouding ⅓ kunt toepassen (optie 2). Door deze vrijheid aan de leerlingen aan te bieden, kunnen de leerlingen doen wat ze het leukste vinden en hierdoor worden ze enthousiaster over de les.

Optie 1:
Van ⅓ naar ¼ naar a/b met a<b (10 min)

Docent:

Laat leerlingen zelf aan de slag gaan met deze vraag, en help waar nodig als leerlingen bijvoorbeeld nog moeite hebben met het begrijpen van ¼ vouwen of het patroon nog niet zien om tot ⅕ te komen.

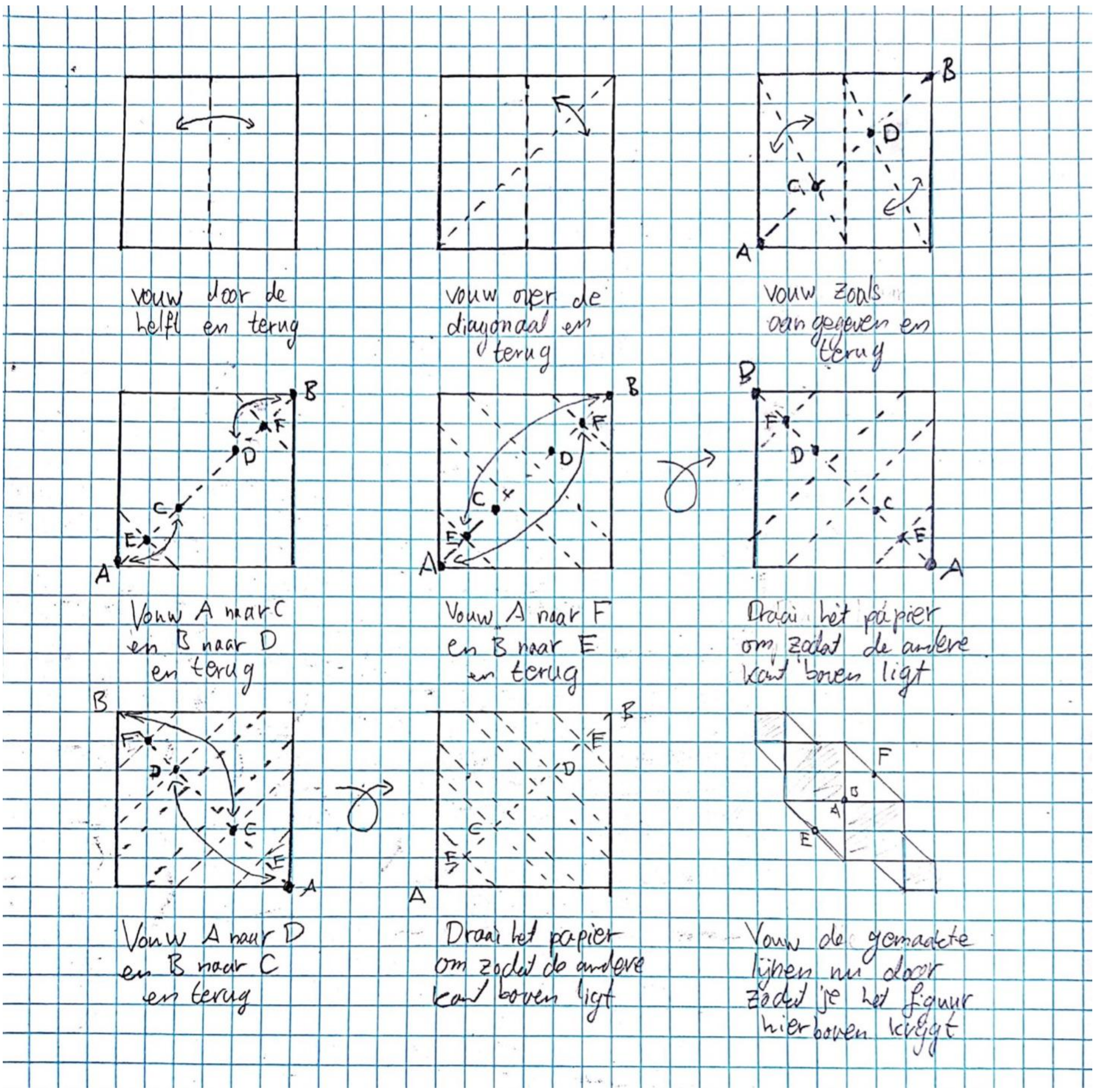
Leerling:

Gaat zelf verder met de opdrachten om meer gevoel voor het vouwen van verschillende verhoudingen te krijgen met behulp van lijn vergelijkingen. Leerlingen maken bij deze vraag kennis met het concept van een algoritme, doordat je voor elke verhouding dezelfde stappen kunt herhalen. Daarnaast traint de leerling ook het vermogen om concrete gevallen te veralgemeniseren en abstracter te maken.

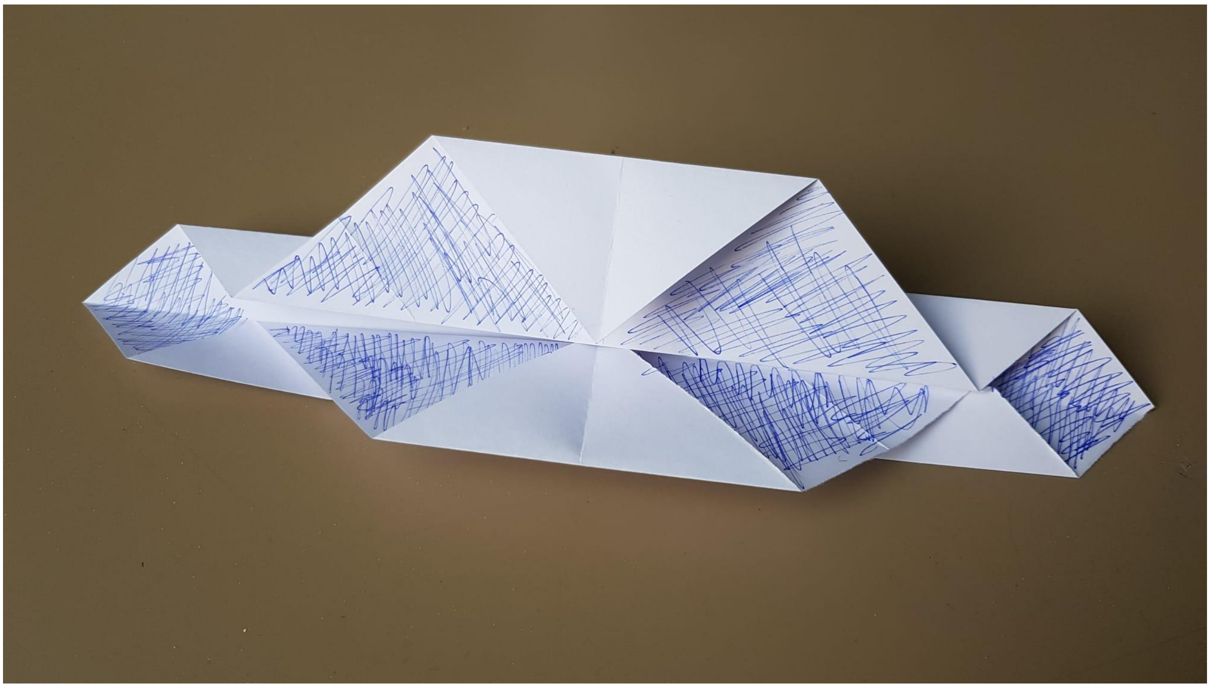
__Optie 2:__
Origami Model met verhouding ⅓ (10 min.)

De leerlingen kunnen zelf aan de slag gaan met het vouwwerkje hieronder. Met alleen de instructie hieronder zouden ze dit in principe moeten kunnen doen. Het is echter aan te raden om een voorbeeld te hebben zodat de leerlingen weten waar ze naartoe werken. Vooral de laatste stap kan misschien niet helemaal duidelijk zijn voor iedereen.

Weerspiegeling van bergen in water



Nadat de leerlingen dit hebben gevouwen kunnen ze het als volgt inkleuren:



Als ze het vouwwerkje nu dwars doorvouwen (zoals hierboven) lijkt het op bergen die weerspiegelen in het water, al is het minimalistisch.

Afsluiting van de les (2 min.)

Sluit de les gezamenlijk af door te reflecteren op wat ze hebben gedaan. Je kunt hierbij zeggen dat de leerlingen nu met origami wiskunde hebben geleerd. Ze hebben hierdoor meer inzicht gekregen in verhoudingen. Je kunt dan ook aan de leerlingen vragen wat de leerlingen van de les vonden en hierop aanhaken.

Literatuurlijst

1) Arıcı, S.; Aslan-Tutak, F. THE EFFECT OF ORIGAMI-BASED INSTRUCTION ON SPATIAL VISUALIZATION, GEOMETRY ACHIEVEMENT, AND GEOMETRIC REASONING. Int. J. of Sci. and Math. Educ. 13, 179–200 (2015). https://doi.org/10.1007/s10763-013-9487-8
2) Piggot, J. (2007) CULTIVATING CREATIVITY. Teaching Matematics. Beschikbaar via de link: https://nrich.maths.org/5784
3) Lang, R. J. (2003) ORIGAMI AND GEOMETRIC CONSTRUCTIONS, Beschikbaar via de link: http://www.wiskundemeisjes.nl/wp-content/uploads/2008/02/origami_constructions.pdf
4) Auckly, D.; Cleveland, J. TOTALY REAL ORIGAMI AND IMPOSSIBLE PAPER FOLDING
The American Mathematical Monthly. (1995). 215 - 226.